

Chapitre 2

Calcul algébrique dans $\mathbb{R}$

Plan du chapitre

1	Rappels	2
1.1	Opérations sur les (in)égalités dans $\mathbb{R}$	2
1.2	Valeur absolue	3
2	Équations et inéquations	4
2.1	Vocabulaire	4
2.2	Résolution par analyse-synthèse	5
2.3	Résolution par équivalences – cas des équations	6
2.4	Résolution par équivalences – cas des inéquations	7
2.5	(In)équations avec des valeurs absolues	9
2.6	(In)équations à paramètre	10
3	Partie entière	11
4	Compléments	14
4.1	Majorer / minorer une expression	14
4.2	Inégalités triangulaires	14
4.3	Distance entre deux réels	16
5	Méthodes pour les exercices	16

1 Rappels

1.1 Opérations sur les (in)égalités dans $\mathbb{R}$

Théorème 2.1 – Opérations et inégalités

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1. Transitivité de l'inégalité : $\begin{cases} a \leq b \\ b \leq c \end{cases} \implies a \leq c$

2. Addition : si deux inégalités sont **dans le même sens**, on peut les additionner :

$$\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \implies a + c \leq b + d$$

3. Multiplication : si on multiplie une inégalité par un réel λ qui est ...

... **positif**, alors le sens est conservé :

$$a \leq b \implies \lambda a \leq \lambda b \quad (\text{si } \lambda \geq 0)$$

... **négatif**, alors le sens est inversé :

$$a \leq b \implies \lambda a \geq \lambda b \quad (\text{si } \lambda \leq 0)$$



On ne peut en aucun cas soustraire des inégalités : $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \not\implies a - c \leq b - d$

Remarque. Dans les assertions 1 et 2, si une des deux inégalités de départ est stricte, alors l'inégalité de la conclusion est stricte également, par exemple :

$$\begin{cases} a \leq b \\ c < d \end{cases} \implies a + c < b + d$$

En revanche, pour l'assertion 3, il faut non seulement avoir $a < b$ mais aussi une condition de signe strict sur λ . Par exemple, si $a < b$ et $\lambda > 0$, on peut affirmer que $\lambda a < \lambda b$.

Théorème 2.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n$ des réels **positifs**. Si $a_1 + \dots + a_n = 0$, alors tous les réels $a_1, \dots, a_n$ sont nuls.

Démonstration.

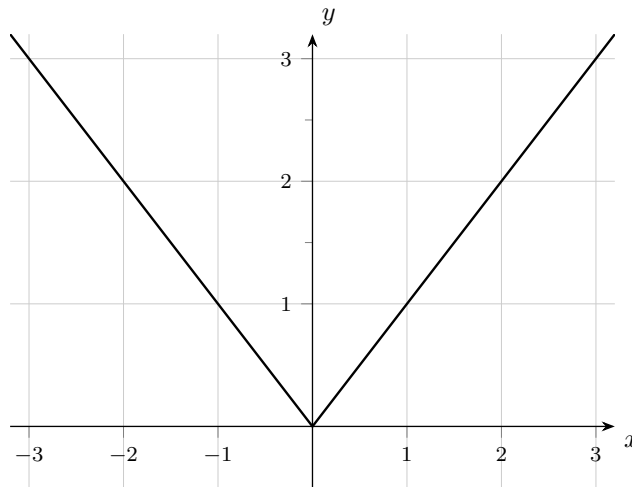
□

1.2 Valeur absolue

Définition 2.3

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $|x|$ la valeur absolue de x que l'on définit par :

$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Définition équivalente : $|x| = \max(x, -x)$, i.e. $|x|$ est la valeur maximale entre x et $-x$.

Théorème 2.4 – Propriétés évidentes de la valeur absolue

Soit $x, y \in \mathbb{R}$.

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| \geq x$ et $|x| \geq -x$
3. Pour tout réel positif a :
4. $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$
5. $|x| = |-x|$ (la fonction étant paire)

$$-a \leq x \leq a \iff |x| \leq a$$

$$6. |xy| = |x| \times |y| \quad \text{et si } y \neq 0 : \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

En particulier, on peut prendre $a = |x|$ dans l'assertion 3, de sorte qu'on a : $-|x| \leq x \leq |x|$

Théorème 2.5 – Relations entre carré, racine carrée et valeur absolue

Pour tout réel a , on a :

$$|a|^2 = a^2$$

Pour tout réel a **positif**, on a :

$$\sqrt{a^2} = a$$

Pour tout réel a , on a :

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Remarque. Les trois relations du Théorème 2.5 sont extrêmement utiles dans les exercices. Il ne faut pas les confondre !

2 Équations et inéquations

Vos connaissances de terminale vous permettent de résoudre toute (in)équation sous la forme

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

avec a , b et c des nombres réels connus. Dans ce chapitre, **pour résoudre une (in)équation, on cherche à se ramener à une des formes ci-dessus.**

2.1 Vocabulaire

On appelle (in)équation une (in)égalité comportant une ou plusieurs inconnues à déterminer. Dans ce chapitre, on se limite à des équations qui font intervenir des opérations dites algébriques : $+$, $-$, $\times$, $/$, puissance, racine, auquel on adjoindra la valeur absolue et la partie entière. Voici deux exemples d'énoncés :

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x + 2 = \sqrt{x+8}$

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|x-2| \leq \frac{1}{x+3}$

L'inconnue est parfois sous-entendue : ici, on comprend que l'inconnue est x (car cette variable n'a pas été introduite avant), et qu'il s'agit d'un réel ("dans $\mathbb{R}$ ").

Notation. L'ensemble des solutions d'une (in)équation est noté S et *il n'est pas nécessaire de l'introduire*.

Définition 2.6 – Non officiel !

Dans ce cours, on appellera ensemble de définition d'une (in)équation d'inconnue x comme étant l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles l'assertion de l'équation a un sens.

Notation. Dans ce cours, on notera typiquement $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition mais contrairement à S , ce n'est pas une notation officielle : il faudra la réintroduire à chaque fois.

Exemple. On considère l'équation :

$$\sqrt{x-5} \geq 3$$

- Cette équation n'a un sens que si $x-5 \geq 0$, donc si $x \geq 5$. L'ensemble de définition est donc

$$\mathcal{D} = [5, +\infty[$$

- On peut vérifier facilement que x est solution de cette équation si et seulement si $x \geq 14$. L'ensemble des solutions est donc

$$S = [14, +\infty[$$



Ne pas confondre $\mathcal{D}$ et S ! Si on pose

$$P(x) : \sqrt{x-5} \geq 3$$

alors l'assertion $P(6)$ a bien un sens (et elle est fausse). Par contre, $P(4)$ n'a pas de sens.

Remarque. Les ensembles $\mathcal{D}$ et S sont l'alpha et l'oméga de toute résolution d'équation. Au début de TOUTE résolution, on doit déterminer $\mathcal{D}$. À la fin de TOUTE résolution, on doit déterminer et écrire S .

2.2 Résolution par analyse-synthèse

2.7 ★★ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x + 2 = \sqrt{x + 8}$.

Solution.

Remarque. L'analyse-synthèse n'est pas indiquée pour résoudre des *inéquations*. En effet, la présence d'un " $\leq$ " ou d'un " $\geq$ " conduit souvent à une infinité de candidats possibles en analyse, et la synthèse devient plus laborieuse.

Remarque. L'analyse-synthèse n'est pas la méthode la plus rapide mais elle est la plus facile à appliquer. En effet, on utilise uniquement des **implications**. Toute la difficulté des autres méthodes est de raisonner par équivalences successives, ce qui demande beaucoup plus de rigueur, voir partie suivante.

2.3 Résolution par équivalences – cas des équations

La méthode de résolution par équivalences successives suit un cheminement naturel : on applique des opérations ou des fonctions qui vont peu à peu simplifier l'équation de départ en une forme facile à résoudre. Mais toute la difficulté est de **garder à chaque étape des équivalences**, notamment **lorsqu'on applique une fonction**.

Étant donné deux réels a et b et une fonction f définie en a , il est clair que :

$$a = b \implies f(a) = f(b)$$



Si $f(a) = f(b)$, on ne peut pas en déduire que $a = b$! Contre-exemple :

$$5^2 = (-5)^2 \quad \text{mais} \quad 5 \neq -5$$

Remarque. Pour affirmer l'équivalence " $a = b \iff f(a) = f(b)$ ", il faut s'assurer que, partant de $f(a) = f(b)$, on peut revenir à $a = b$ en appliquant la bonne fonction. Parfois, il faut une condition de signe sur a et/ou b , ce qui mène à des disjonctions de cas.

Théorème 2.8

Soit a et b deux réels. Alors on a $a = b \iff a^2 = b^2$ si et seulement si a et b sont de même signe (au sens large).

Méthode – Garder une équivalence en passant au carré dans une égalité

Avant de passer au carré dans une équation $a(x) = b(x)$, **on disjoint les cas pour assurer que $a(x)$ et $b(x)$ ont le même signe.**

2.9 ★★ Résoudre l'équation $x + 5 = \sqrt{x + 11}$.

Solution.

2.4 Résolution par équivalences – cas des inéquations

Théorème 2.10 – Appliquer une fonction à une inégalité

Soit a et b deux réels. Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Cas monotone :

$$a \leq b \implies \begin{cases} f(a) \leq f(b) & \text{si } f \text{ est croissante sur } [a, b] \\ f(a) \geq f(b) & \text{si } f \text{ est décroissante sur } [a, b] \end{cases}$$

- Cas strictement monotone :

$$a < b \implies \begin{cases} f(a) < f(b) & \text{si } f \text{ est strictement croissante sur } [a, b] \\ f(a) > f(b) & \text{si } f \text{ est strictement décroissante sur } [a, b] \end{cases}$$



Pour appliquer le théorème ci-dessus, il faut que f soit définie et monotone sur **tout l'intervalle** $[a, b]$.
Contre-exemple avec la fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$:

$$-2 \leq 2 \not\implies \frac{1}{-2} \geq \frac{1}{2}$$

La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ mais ne peut pas être décroissante sur $[-2, 2]$ car elle n'est pas définie en zéro. D'où l'absurdité ci-dessus.

Méthode – Passer au carré dans une inégalité

Avant de passer au carré dans une inéquation $a(x) \leq b(x)$, **on disjoint les cas pour assurer que $a(x)$ et $b(x)$ ont le même signe** :

- Si $a(x)$ et $b(x)$ sont positifs (ou nuls), alors la fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $[a(x), b(x)]$ et on peut passer au carré :

$$a(x) \leq b(x) \quad \boxed{\iff} \quad a(x)^2 \leq b(x)^2 \quad (\star)$$

- Si $a(x)$ et $b(x)$ sont négatifs (ou nuls), alors on multiplie l'inéquation par -1 ce qui nous ramène à une inéquation de la forme $A(x) \leq B(x)$ avec $A(x)$ et $B(x)$ positifs, et on applique le cas précédent.
- Dans les autres cas, la résolution est triviale :
 - Si $a(x) < 0$ et $b(x) > 0$, alors on a bien $a(x) \leq b(x)$! Donc $x \in \mathcal{S}$
 - Si $a(x) > 0$ et $b(x) < 0$, alors on ne peut pas avoir $a(x) \leq b(x)$! Donc $x \notin \mathcal{S}$.

Remarque. Justifions l'équivalence dans $(\star)$: pour le sens direct, cela découle du fait que la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Pour le sens réciproque, cela découle du fait que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante (et que $\sqrt{a^2} = a$ si $a \geq 0$).

Remarque. La méthode ci-dessus est également vraie avec une inégalité stricte, i.e. $a(x) < b(x)$, car la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, de même que la fonction racine carrée.

2.11 ★★ Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$x - 2 < \sqrt{3x + 4}$$

*Solution.***2.12** ★★ Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{x+5}{x^2-1} > 1$$

Solution.

2.5 (In)équations avec des valeurs absolues

Méthode

Pour résoudre une (in)équation avec des valeurs absolues, on peut :

- Éventuellement mettre au carré l'(in)équation et simplifier des valeurs absolues car $|\dots|^2 = (\dots)^2$.
- Faire un tableau de signes qui contiendra chaque expression dans des valeurs absolues, et résoudre l'(in)équation dans chacun des cas.

2.13 ★ Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$|x^2 - 2x| + |2x - 5| = 4$$

Solution.

2.6 (In)équations à paramètre

Il arrive qu'une (in)équation dépende d'un paramètre inconnu m dans $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{x+3} = x + m$$

Chaque valeur de m peut conduire à des solutions x différentes. En conséquence, l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ et l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ peuvent maintenant dépendre de m et pourraient donc être notés $\mathcal{D}_m$ et $\mathcal{S}_m$. Le plus souvent, il y a des valeurs critiques de m pour lesquelles il faut faire des disjonctions de cas. **En général, les exercices vous guident sur les disjonctions de cas à faire avant toute chose.**

2.14 ★★ Résoudre dans $\mathbb{R}$ en discutant selon les valeurs de $m \in \mathbb{R}$:

$$|x| + x = m$$

On distinguera les cas $m < 0$, $m = 0$ et $m > 0$.

Solution.

3 Partie entière

Définition 2.15 – Partie entière

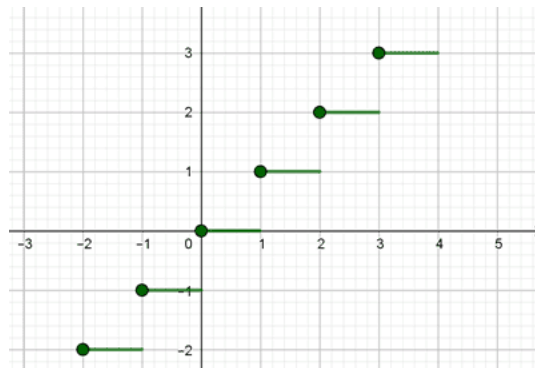
Soit x un réel. On appelle partie entière de x , le plus grand entier n tel que $n \leq x$. Il est noté $\lfloor x \rfloor$.

En particulier, si $n \in \mathbb{Z}$ et $n \leq x$, alors $n \leq \lfloor x \rfloor$.

Exemple. Si $x \in \mathbb{Z}$, alors $\lfloor x \rfloor = x$.

$$\left\lfloor \frac{8}{3} \right\rfloor = \dots \quad \lfloor \pi \rfloor = \dots \quad \lfloor -e \rfloor = \dots$$

Voici le graphe de la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ (c'est une fonction discontinue) :


Théorème 2.16

La fonction partie entière est croissante : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ $x \leq y \implies [x] \leq [y]$

Remarque. Pour tout réel x , on a :

$$[x] \leq x < [x] + 1 \quad \text{ou de manière équivalente} \quad x - 1 < [x] \leq x$$

et $[x]$ est le seul entier qui vérifie l'une de ces inégalités.

Théorème 2.17

Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a $[x + k] = [x] + k$.



L'hypothèse " $k \in \mathbb{Z}$ " est essentielle. Si on essaye de trouver des formules équivalentes pour des réels x et y , on trouve facilement des contre-exemples : ainsi, avec $x = y = 0,9$ on obtient :

$$\begin{cases} [x + y] = \dots\dots \\ [x] + y = \dots\dots \\ [x] + [y] = \dots\dots \end{cases}$$



Pour un entier n et un réel x , on a en général $[nx] \neq n[x]$. Contre-exemple : avec $x = \dots\dots$, on a $2[x] = \dots\dots$ et $[2x] = \dots\dots$

Méthode

Pour résoudre une (in)équation avec des parties entières, une méthode très efficace est de poser :

$$\varepsilon = x - [x] \in [0, 1[$$

de sorte que x se réécrit en $[x] + \varepsilon$, et de travailler avec deux inconnues : l'entier $[x]$ et ε qui est dans $[0, 1[$.

Le réel ε est appelé la partie décimale (ou partie fractionnaire) de x . On note parfois $\{x\}$ cette partie décimale. L'avantage est que $[x]$ est un entier qui peut donc sortir librement d'une partie entière (comme l'entier k du Théorème 2.17).

2.18

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

Solution.

Remarque. On retrouve couramment la notation $\lceil x \rceil$ pour désigner le plus petit entier r tel que $x \leq r$.

4 Compléments

4.1 Majorer / minorer une expression

Méthode – Majorer ou minorer une expression

Soit $a, b \in \mathbb{R}$

- Pour majorer $a - b$, il faut *majorer* a et *minorer* b
- Pour minorer $a - b$, il faut *minorer* a et *majorer* b
- Pour majorer $\frac{a}{b}$ avec $a \geq 0$ et $b > 0$, il faut *majorer* a et *minorer* b .
- Pour minorer $\frac{a}{b}$ avec $a \geq 0$ et $b > 0$, il faut *minorer* a et *majorer* b .

Exemple. Soit $x \in [1, 2]$. Majorer et minorer l'expression $\frac{x^2 - \ln x}{x + 3}$.

4.2 Inégalités triangulaires

Théorème 2.19 – Inégalités triangulaire

Soit x et y deux réels.

Première inégalité triangulaire : $|x + y| \leq |x| + |y|$

Seconde inégalité triangulaire : $||x| - |y|| \leq |x - y|$

Démonstration. • Montrons la première inégalité.

- Montrons maintenant la seconde inégalité.

□

Remarque. En appliquant la première inégalité triangulaire, on peut aussi majorer $|x - y|$:

$$\begin{aligned}|x - y| &= |x + (-y)| \\ &\leq |x| + |-y| \\ &= |x| + |y|\end{aligned}$$



On ne peut écrire ceci : ~~$|x - y| \leq |x| - |y|$~~ . Tester avec $x = 2$ et $y = 3$...

4.3 Distance entre deux réels

Définition 2.20

Soit x et a deux réels. La distance de x à a est noté $d(x, a)$ et est défini par : $d(x, a) = |x - a|$.

La quantité $|x - a|$ représente la distance entre les réels x et a lorsqu'ils sont placés sur une droite orientée :

On a toujours $d(x, a) = d(a, x)$.

Exemple. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \geq 0$. Résoudre l'inéquation $|x - a| \leq b$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

5 Méthodes pour les exercices

Méthode

Pour résoudre une équation ou une inéquation :

1. On détermine l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ si $\mathcal{D} \neq \mathbb{R}$.
2. On raisonne par analyse-synthèse (si c'est une équation) OU par équivalences et disjonction de cas.
3. On conclut en donnant l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$.

Méthode

Si on raisonne par équivalences, **avant** de passer au carré dans une (in)équation, on disjoint les cas pour que les deux membres soient de même signe (et on se ramène au cas positif en multipliant par -1).

Méthode

Pour résoudre une (in)équation avec des valeurs absolues, on peut :

- Éventuellement mettre au carré l'(in)équation et simplifier des valeurs absolues car $|\dots|^2 = (\dots)^2$.
- Faire un tableau de signes qui contiendra chaque expression dans des valeurs absolues, et résoudre l'(in)équation dans chacun des cas.

Méthode

Pour résoudre un exercice sur les parties entières dont l'inconnue est x , on peut poser $\varepsilon = x - \lfloor x \rfloor$, i.e. la partie fractionnaire de x et remplacer chaque x dans une partie entière par $\lfloor x \rfloor + \varepsilon$.